12 FEPEG
FÓRUM
ENSINO • PESQUISA • EXTENSÃO • GESTÃO
CIÊNCIA E TECNOLOGIA: IMPLICAÇÕES NO ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO
REALIZAÇÃO: Unimontes PIBID Unimontes
APOIO: FAPEMIG FADENOR
ISSN: 1806-549X

A LEMNISCATA DE BERNOULLI UMA CURVA PLANA DIFERENCIÁVEL E A DEDUÇÃO DA FÓRMULA PARA O CÁLCULO DE SUA ÁREA.

Autores: TAMIRIS SUELLEN FERREIRA MORAIS, DÉBORA SANTOS RODRIGUES

A Lemniscata de Bernoulli uma curva plana diferenciável e a dedução da fórmula para o cálculo de sua área.

Introdução

A geometria é uma área da matemática que estuda as figuras, com suas formas, tamanhos, posições e propriedades. A Geometria Diferencial por sua vez, estuda os objetos de natureza geométrica, usando o cálculo diferencial e integral, e consiste em aplicações dos métodos da análise local e global a problemas de geometria. O presente trabalho tem como principal objetivo a dedução da integral que define a área da Lemniscata de Bernoulli, uma curva plana diferenciável.Utilizaremos algumas definições para nortear o presente trabalho. Uma curva parametrizada diferenciável de R^3, é uma aplicação diferenciável ?, de Classe C*?*, de um intervalo aberto *I* ? R em R^3 . A variável *t ? I* é o parâmetro, e o subconjunto de R^3 formado pelos pontos ?(*t*), *t* ? *I,* é o traço da curva.

Uma curva parametrizada diferenciável de R^3 é uma aplicação de *? (t)* = (x*(t),* y*(t),* z*(t)), t ? I*, onde x*(t)*,y*(t)*,z*(t)* são funções diferenciáveis de classe C*?*. Um fator muito importante é compreender a importância da definição de curva como uma função de um parâmetro *t* e perceber a diferença existente entre curva (parametrizada) e o traço da curva. Para ilustrarmos essa diferença, tomemos como exemplo a trajetória de uma formiga no qual a cada instante t, seja marcado sua posição. A formiga sairá do ponto inicial A, no instante t = 0 e terá como destino o ponto B, seu ponto final no instante t = 8,e o rastro de uma lesma que percorreu a mesma trajetória. Observemos pela figura 1 quando a formiga chegar ao ponto B, no instante t = 8, obtemos o traçado do caminho percorrido por ela. Na figura 2, é difícil sabermos se por algum motivo a lesma esteve parada em algum instante t, e qual foi o sentido percorrido, se saiu do ponto A para B ou B para A. Por este exemplo percebemos que a geometria diferencial, se interessa pela função representada pela posição em que a formiga se encontrava em um determinando instante t. É adotado na geometria diferencial para definição de curva o conceito de curva parametrizada, ou seja, *?= I* -- R 3 . Assumimos também que a função *?* é contínua. No entanto dizer que a função é continua não é suficiente, pois em 1980 Peano apresentou uma função contínua de [0,1] em R^2, chamada curva de Peano, que descontrói a nossa intuição de curva. Logo após em 1915 Sierpinski, também apresenta alguns modelos de função contínua de [0,1] em R^2 , que colabora para essa desconstrução. Por este motivo é preciso condições adicionais as curvas, além de continuidade, para que nos afastarmos dos modelos que desconstroem a nossa intuição de curvas. Agora dizemos que uma curva parametrizada *?* , é suave. Se *?* é uma função suave, todas as derivadas, *?I, ?II, ?III*,...existem. Em coordenadas cartesianas, tem se ? (t) = (x (t), y (t), z (t)), t ? I, em que x = x (t), y = y (t) e z = z (t) são funções diferenciáveis. O vetor ?I (t) = (xI (t), yI (t), zI (t)), t ? I, igualmente, é chamado de vetor tangente (ou vetor velocidade) de ? em t. A curva ? é dita, então, regular, quando ?I (t) ? 0 ? t ? I. Definimos uma curva como plana (parametrizada) quando o seu traço está contido num plano euclidiano, podendo ser aberta como uma reta, parábola ,hipérbole, ou fechada como o circulo, a elipse, e se, e somente se tem torsão ? = 0. Acurva algébrica plana por sua vez, é o lugar dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem a equação polinomial f (x,y)= 0, onde f é um polinômio não constante.

Material e métodos.

A curva escolhida para estudo é a lemniscata de Bernoulli uma curva algébrica do quarto grau que pode ser descrita na forma:

- Equação cartesiana: $(x^2+y^2) = a^2(x^2-y^2)$.
- Coordenadas polares: $r^2 = \pm a^2$ Cos 2? ou $r^2 = \pm a^2$ Sen 2?.
- Equação paramétrica: ? (t) = (sen(t), sen(2t)).

12 FEPEG
FÓRUM
ENSINO • PESQUISA • EXTENSÃO • GESTÃO
CIÊNCIA E TECNOLOGIA: IMPLICAÇÕES NO ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO
REALIZAÇÃO: Unimontes PIBID Unimontes
APOIO: FAPEMIG FADENOR
ISSN: 1806-549X

A Lemniscata foi descrita pela primeira vez em 1964, pelo matemático Suíço Jacob Bernoulli, que por sua vez não tinha o conhecimento que há 14 (quatorze) anos atrás, esta curva havia sido estudada pelo astrônomo e matemático italiano Giovanni Cassini , enquanto buscava respostas sobre o curso relativo da terra em torno do sol, sendo então a lemniscata um caso especial das ovais de Cassini. As formas em que esta curva é descrita é de fundamental importância,pois por elas é possivel chegar a vários resultados como, por exemplo: usameremos a forma de coordenadas polares para chegarmos a dedução do cálculo da área da Lemniscata. A figura 3 representa curva algébrica plana lemniscata de Bernoulli, obtida pelo software geogebra, através da equação paramétrica ? (t) = (sen (t), sen (2t)),com 0? t ? 2? .Para conseguirmos desenvolver o cálculo da área desta curva precisamos ter conhecimento da sua equação na forma polar, e ter os conhecimentos necessários para o desenvolvimento do cálculo.

Resultados e discussão

Para obtermos a área da Lemniscata utilizaremos a equação em coordenada polar r2 = ± a2 Cos 2?. Agora vamos encontrar a área desta curva, que é deduzida através de uma integral definida.. Para encontrar a área de uma curva em coordenadas polares dizemos que a área é igual Image not found $\frac{1}{2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} f(\theta)^2 d\theta$ Image not found or type unknown . Para encontramos então a área desta curva, desenvolveremos os cálculos. Para Cos x, x ? ao 1o e 4o quadrantes, onde o Cos x ? 0 .Como a curva é simétrica, calcula-se a área da região do 1o quadrante e multiplica-se por 4. Na figura 4 devemos observar os intervalos em que a curva é definida. Pela análise da figura, concluímos que a curva do primeiro quadrante está definida em 0 ? ? ? ?/4.Tomando agora a integral definida para o cálculo em coordenadas p Image not found or type unknown Image not found or type unknown , e a equação na forma polar da lemnsicata r2 = ± a2 Cos 2?.

12 FEPEG
FÓRUM
ENSINO • PESQUISA • EXTENSÃO • GESTÃO
CIÊNCIA E TECNOLOGIA: IMPLICAÇÕES NO ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO
REALIZAÇÃO: Unimontes PIBID Unimontes
APOIO: FAPEMIG FADENOR
ISSN: 1806-549X

Vamos encontrar a área desenvolvendo o cálculo.

$A = 4 \times A_1$. $A_1 = [\frac{1}{2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} f(\theta)^2 d\theta]$

.Substituindo os limites em a curva esta definida na integral obtemos:. $A_1 = [\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)^2 d\theta]$

Substituindo o $f(\theta)^2$ por r^2 temos:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha^2 Cos\ 2\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} Cos\ 2\theta\ d\theta$$

Vamos fazer uma mudança de variável para continuamos a nossa integração.

$u = 2\theta$ $du = 2\ d\theta$ $d\theta = \frac{1}{2}\ du$.

Se $\theta = 0$, $u = 0$.

Se $\theta = \frac{\pi}{4}$, $u = \frac{\pi}{2}$.

$$A_1 = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\ u\ \frac{1}{2}\ du = \frac{1}{4}\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\ u\ du = \frac{1}{4}\alpha^2 (sen\ u|_0^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{4}\alpha^2 (sen\ \frac{\pi}{2} - sen 0).$$

$A_1 = \frac{1}{4}\alpha^2 (1 - 0)$. $A_1 = \frac{1}{4}\alpha^2$.

Substituindo o valor encontrado de A_1 na equação de A, temos que $A = 4 \times \frac{1}{4}\alpha^2$.

Portanto $A = \alpha^2$

Conclusão/Conclusões/Considerações finais

Com o estudo desta curva, pude observar o quanto é amplo a área da geometria, e o quanto ela pode ser explorada, através de softwares, e o quanto a uma boa visualização das curvas colaboram para um maior aprendizado. Pude observar que a geometria não é um conteúdo independente dos demais, para se entender esta geometria é necessário ter entendimento e conhecimento de outras áreas da matemática como, por exemplo, o cálculo integral e diferencial que se mostrou presente em todas as etapas para o cálculo da área da lemniscata.

Agradecimentos

A Professora Ms. e Orientadora Débora Santos Rodrigues pela oportunidade e incentivo a escrita do resumo tematizada na Geometria Diferencial Clássica, no estudo da área da curva escolhida.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa da residência pedagógica que me permitiu participar ativamente deste fórum, tendo a oportunidade de apresentar este trabalho em forma de pôster, fruto de um estudo detalhado sobre o tema.

Referências bibliográficas

ARAUJO, P.V.Geometriadiferencial. 2. ed. RiodeJaneiro:IMPA,2012.

TENENBLAT, Keti. Introdução à geometria diferencial. 2.ed. revisada. São Paulo: Bluncher, 2008.

ARAUJO,P.V. Geoometria Diferencial. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 1998.

VAINSENCHER,Israel. Introdução as curvas algébricas planas. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

12 FEPEG
CIÊNCIA E TECNOLOGIA: IMPLICAÇÕES NO ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO
FÓRUM
ENSINO • PESQUISA • EXTENSÃO • GESTÃO
REALIZAÇÃO: Unimontes PIBID Unimontes
APOIO: FAPEMIG FADENOR
ISSN: 1806-549X

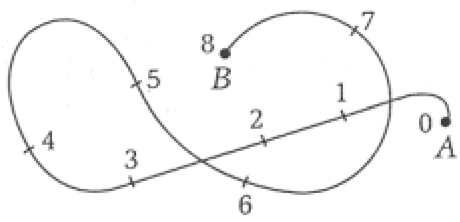
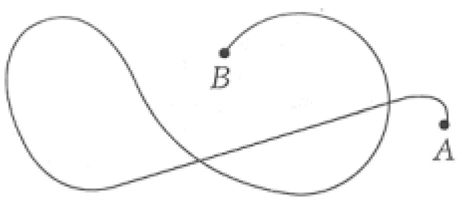


Figura 1. Trajetória da Formiga



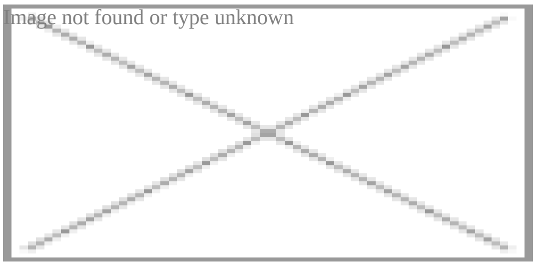
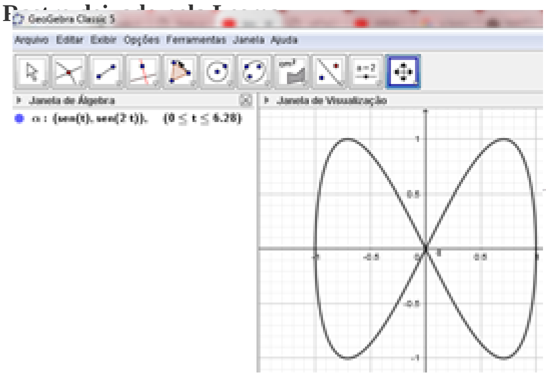


Figura 2. P



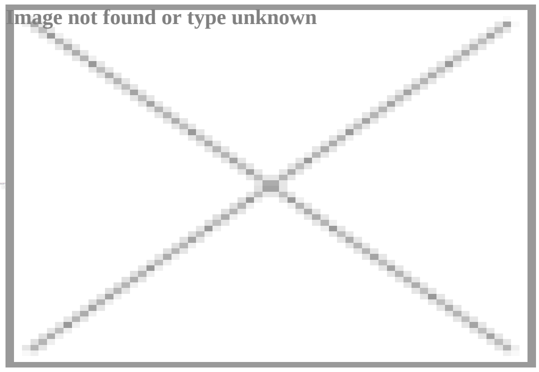
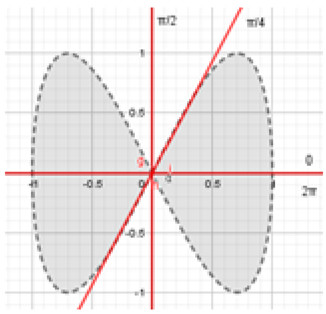


Figura 3. A lemniscata de Bernoulli no geogebra pela equação paramétrica.



ISSN: 1806-549X

Image not found or type unknown

Figura 4. A leminscata de Bernouli e seus intervalos de integração no geogebra.